Université Paris-Diderot
Systèmes dynamiques holomorphes

Année 2019-2020
M2 Math Fonda

# Examen

19 Décembre 2019

*Durée : 180 minutes*

*L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.*

**Exercice 1.** Soit $f : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe holomorphe inversible : $f'(0) =: \lambda \neq 0$.

(a) Montrer que si $\lambda$ n'est pas une racine de l'unité, alors $f$ est formellement linéarisable.

(b) Montrer que si $0 < |\lambda| < 1$, alors $f$ est holomorphiquement linéarisable.

(c) Donner un exemple de $f$ qui est formellement linéarisable, mais qui ne l'est pas holomorphiquement (utiliser les théorèmes vus en cours, en ayant soin de bien les énoncer).

**Exercice 2.** On dénote par $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. Pour tout $r > 1$, soit $A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < r\}$. Pour tout $h > 0$, soit $B_h = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < h\}$. On rappelle que la métrique de Poincaré de $\mathbb{H}$ est donnée par $ds_{\mathbb{H}} = \frac{|dz|}{y}$, où $y = \operatorname{Im} z$.

(a) Montrer que l'application $\Phi_h : B_h \to \mathbb{H}$ donnée par $\Phi_h(z) = e^{\pi z/h}$ est un biholomorphisme. En déduire que la métrique de Poincaré de $B_h$ est donnée par

$$ds_h = \frac{\frac{\pi}{h}|dz|}{\sin\left(\frac{\pi y}{h}\right)}.$$

(b) Montrer que pour tout $h > 0$, l'application $f : B_h \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = e^{-\mathrm{i}z}$ est un revêtement universel de $A_r$, avec $r = e^h$.

(c) En déduire une formule pour la métrique de Poincaré $d\sigma_r$ de $A_r$.

(d)* Calculer la longueur du cercle $C_t$ de centre 0 et rayon $t \in ]1, r[$ par rapport à la distance de Poincaré de $A_r$. Que se passe-t-il quand $t \to 1^+$, ou $t \to r^-$ ?

**Exercice 3.** Soit $X$ une surface de Riemann, $f : X \to X$ une fonction holomorphe, et $x_0 = f(x_0)$ un point fixe de $f$ dans $X$, de multiplicateur $\lambda$. On dénote par $\mathcal{A}$ le bassin d'attraction de $f$ à $x_0$, c'est à dire :

$$\mathcal{A} = \{x \in X \mid f^n(x) \to x_0\}.$$

Le but de cet exercice est montrer le théorème suivant :

**Théorème.** *$\mathcal{A}$ est un voisinage de $x_0$ si et seulement si $x_0$ est un point fixe contractant (c'est-à-dire, $|\lambda| < 1$).*

(a) Montrer que si $|\lambda| < 1$, alors $\mathcal{A}$ est un voisinage de $x_0$.

(b) Montrer que si $\mathcal{A}$ est un voisinage de $x_0$, alors $|\lambda| \leq 1$.

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des points $x \in X$ qui admettent un voisinge $U$ de $x$ tels que $f^n$ tendent à la constante $x_0$ uniformément dans $U$.

(c) Montrer que si $\mathcal{B}$ est un voisinage de $x_0$, alors $x_0$ est contractant.

(d) Montrer que si $X$ est hyperbolique, alors $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Supposons que $X = \mathbb{C}$ (ou $X = \widehat{\mathbb{C}}$), et $x_0 = 0$. Soit $D_r$ un disque fermé centré à l'origine, de rayon $r > 0$, contenu dans $\mathcal{A}$. Supposons (par l'absurde) que $|\lambda| \geq 1$.

(e) Montrer que $\bigcup_n f^n(D_r)$ n'est pas borné.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ un entier positif, et $K_m = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{m} f^j(D_r)$.

(f) Montrer que pour tout $m$ il existe $x \in D_r$ et $n \gg 0$ tels que $f^n(x) \notin K_m$.

(g) Déduire que les ensembles $C_m = \{z \in D_r \mid f^j(z) \notin \mathring{D}_r \text{ pour tout } j = 1, \ldots, m\}$ forment une suite décroissante non-vide de compacts.

(h) Déduire une contradiction en prenant $x \in \bigcap_m C_m$.

On a donc montré le théorème dans le cas où $X$ est hyperbolique, ou $X = \mathbb{C}$ ou $X = \widehat{\mathbb{C}}$.

(i)* Montrer le théorème dans le cas où $X$ est une surface de Riemann quelconque.

**Exercice 4.** Soit $a \in \mathbb{D}$, et soit $f_a$ l'application

$$f_a(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$

(a) Montrer que $f_a$ est un biholomorphisme du disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Soit $f$ un produit fini de la forme

$$f(z) = e^{\mathrm{i}\theta} f_{a_1}(z) f_{a_2}(z) \cdots f_{a_k}(z),$$

avec $k \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{D}$.

(b) Montrer que $f$ est une application rationnelle, et que $\mathbb{D}$ et $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ sont $f$-invariants.

(c) Déduire que l'ensemble de Julia $J(f)$ de $f$ est contenu dans $\partial\mathbb{D}$.

(d) Soit $g(z) = 1/f(z)$. Montrer que $J(g)$ est contenu dans $\partial\mathbb{D}$.

(e) Montrer que si $k \geq 2$ et si l'un des facteurs $f_{a_j}$ est l'identité, alors $f$ a deux points fixes attractifs en 0 et $\infty$. En déduire que $J(f) = \partial\mathbb{D}$ dans ce cas.

**Exercice 5.** Pour tout $c \in \mathbb{C}$, soit $f_c(z) = z^2 + c$. L'ensemble de Mandelbrot est défini par

$$M := \{c \in \mathbb{C} \mid (f_c^n(0))_n \text{ est une suite bornée dans } \mathbb{C}\}.$$

(a) Montrer que $c \in M$ si et seulement si $|f_c^n(0)| \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(Suggestion : montrer que $\lim_{n\to+\infty} f_c^n(z) = \infty$ lorsque $|z| > 2$ et $|z| \geq |c|$.)

En déduire que $M$ est contenu dans le disque fermé $D_2$ de centre 0 et rayon 2.

(b) Montrer que $-2 \in M \cap \partial D_2$.

(c)* Montrer que $M$ est compact.

Soit $f_c^n = f_c \circ \cdots \circ f_c$ l'itéré $n$-ième de $f_c$, et $g_n(c) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application polynomiale $g_n(c) = f_c^n(0)$. Considérons la famille $\mathcal{G} = \{g_n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

(d) Montrer que $\mathcal{G}$ est normale dans la partie intérieure de $M$.

(e) Montrer que $\mathcal{G}$ est normale dans $\mathbb{C} \setminus M$.

(f) Montrer que $\mathcal{G}$ n'est pas normale en aucun voisinage de $-2$.

* = Question hors barème.